بومنزه و ثنان

السلسلة2

التمرين9 أ- $|z-1-i|=|iz+1| \Leftrightarrow |z-1-i|=|i||z+1|$ $(*)$

$$\Leftrightarrow |z-(1+i)|=|z-(-1)|$$

نضع $A(1+i)$ و $B(-1)$ و $M(z)$ ومنه $(*) \Leftrightarrow MA=MB$ وبالتالي فان مجمو عة النقط $M(z)$ التي تحقق $(*)$ هي واسط القطعة $[AB]$

ب- نضع $C(1-\frac{i}{2})$ و $M(z)$

$$|2z-2+i|=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left|z-\left(1-\frac{i}{2}\right)\right|=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow MC=\sqrt{3}$$

وبالتالي **فان مجمو عة النقط** $M(z)$ **هي الدائرة ذات المركز** $C(1-\frac{i}{2})$ **والشعاع** $R=\sqrt{3}$

ج- نضع $E(-1+i\sqrt{3})$ **و** $M(z)$

$$|i\bar{z}-\sqrt{3}+i|\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |i||\bar{z}+i\sqrt{3}+1|\le\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |z-(-1+i\sqrt{3}|\le\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow ME\le\sqrt{5}$$

وبالتالي **فان مجمو عة النقط** $M(z)$ **هي القرص الذي مركزه** $E(-1+i\sqrt{3})$ **و شعاعه** $R=\sqrt{5}$

ملاحظة: في السؤالين السا بقين يمكن وضع $z=x+iy$

د- نضع $z=x+iy$

$$(*)|z|=z+\bar{z} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2x \quad (x\ge 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x^2 \quad (x\ge 0)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=y^2 \quad (x\ge 0)$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x\,,y=-\sqrt{3}x \; (x\ge 0)$$

وبالتالي **فان مجمو عة النقط** $M(z)$ **التي تحقق** $(*)$ **هي اتحاد المستقيمين**

$(D_1):y=\sqrt{3}x$ **و** $(D_2):y=-\sqrt{3}x$

ذ- نضع $z=x+iy$

$$z\bar{z}+4z-i\bar{z}\in iIR \Leftrightarrow x^2+y^2+4(x+iy)-i(x-iy)\in iIR$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-y+i(4-x)\in iIR$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-y=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

وبالتالي فان مجموعة النقط $M(z)$ **هي الدائرة ذات المركز** $\Omega(-2,\frac{1}{2})$ **والشعاع**

$$R=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

ر-

$$\frac{iz}{z+1}\in IR \Leftrightarrow \frac{ix-y}{(x+1)+iy}\in IR\ (z\neq -1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(ix-y)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2}\in IR\,(z\neq -1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-xy}{(x+1)^2+y^2}+i\left(\frac{x^2+x+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right)\in IR\,(z\neq -1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+y^2}{(x+1)^2+y^2}=0(z\neq -1)$$
$$\Leftrightarrow x^2+x+y^2=0(z\neq -1)$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(z\neq -1)$$

وبالتالي فان مجموعة النقط $M(z)$ **هي الدائرة ذات المركز** $\Omega(-\frac{1}{2},0)$ **والشعاع**

$R=\frac{1}{4}$ **محرومة من النقطة** $A(-1)$

التمرين14) 1- لدينا $p(z)=(z-i)(z^2+az+b)$ ومنه فان

$$p(z)=z^3+z^2(a-i)+z(b-ia)-ib$$

وبعدعملية المطابقة نحصل على : $a=\sqrt{3}$ و $b=1$

ومنه فان $p(z)=(z-i)(z^2+\sqrt{3}z+1)$

2) أ - $p(z)=(z-i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$

$\Leftrightarrow z^2+\sqrt{3}z+1=0$ او $z=i$

لنحل المعادلة $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

لدينا $\Delta=-1$ ومنه الحلان هما $z_1=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}, z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

وبالتالي فان حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $z_3=i$, $z_1=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}, z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

ب- $\overline{z}=z_1$ أو $\overline{z}=z_2$ أو $p(\overline{z})=0 \Leftrightarrow \overline{z}=z_3$

$z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ أو $z=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ أو $\Leftrightarrow\ z=-i$

ج- $z^2=z_3$ أو $z^2=z_2$ أو $p(z^2)=0 \Leftrightarrow z^2=z_1$

* لدينا $z^2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)^2$

$=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2$

ومنه فان الجدرين المربعين للعدد العقدي z_1 هما : $\alpha_1=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

و $\alpha_2=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

* $z^2=z_2=\overline{z_1}=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2$

ومنه فان الجدرين المربعين للعدد العقدي z_2 هما : $\alpha_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

و $\alpha_4=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

* $z^2=z_3=i=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

ومنه فان الجدرين المربعين للعدد العقدي z_3 هما : $\alpha_5=\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}$

و $\alpha_6=-\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}$

وبالتالي فان حلول المعادلة $p(z^2)=0$ هي: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$